BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE

CLASA a IX-a

1. a) Să se demonstreze că $\frac{a^5}{b^2} \geq 3a^3 - 2a^2b,$ oricare ar fi două numere reale $a,b>0.$

b) Fiind date numerele reale $a,b,c>0,$ să se demonstreze inegalitatea: $\frac{a^5}{b^2}+\frac{b^5}{c^2}+\frac{c^5}{a^2} \geq a^2b+b^2c+c^2a.$

Revista Sinus 2-3 / 2012

Soluţie:

a) Avem: $\frac{a^5}{b^2} \geq 3a^3-2a^2b \mid \cdot \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow a^3 \geq 3ab^2-2b^3 \Leftrightarrow (a-b)^2(a+2b) \geq 0,$ inegalitate evident adevărată. Egalitatea se obţine pentru $a=b.$

b) Aplicând inegalitatea de la punctul a) obţinem $\sum \frac{a^5}{b^2} \geq 3\sum a^3 - 2\sum a^2b,$ deci este suficient să demonstrăm că $\sum a^3 \geq \sum a^2b.$ Din inegalitatea $(a-b)^2(a+2b) \geq 0$ obţinem $2a^3-3a^2b+b^3 \geq 0$. Scriind relaţiile analoage şi sumând obţinem $3\sum a^3 \geq 3\sum a^2b \Leftrightarrow \sum a^3 \geq \sum a^2b,$ c.c.t.d.

Barem:

a) Demonstrează $\frac{a^5}{b^2} \geq 3a^3-2a^2b$	4 p
b) Demonstrează $\sum a^3 \geq \sum a^2b.$	2 p
Finalizare	1 p

2. Fie *a*, *b*, *c* numere reale nenule şi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie, astfel că $a(f\circ f)(x)=bf(x)+cx,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Să se rezolve ecuaţia $f(x)=0,$ ştiind că $b^2=a(b-c).$

Mariana Liliana Popescu, Suceava

Barem:

Demonstrează că funcţia este injectivă	2 p
$f(f(f(0)))=\frac{b}{a}f(f(0))+cf(0)=\frac{b^2}{a^2}f(0)+cf(0)=\frac{b^2+ac}{a^2}f(0)=\frac{b}{a}f(0)=f(f(0))$	4 p
Finalizare: $f(0)=0,$ de unde $x=0$ soluţie unică a ecuaţiei.	1 p

3. Se consideră triunghiul dreptunghic $ABC\ (m(\sphericalangle A)=90^\circ)$ şi înălţimea $AD\perp BC,\ D\in(BC)$. Dacă I_1 şi I_2 sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile ADB şi ADC, arătaţi că raza cercului circumscris triunghiului AI_1I_2 este egală cu raza cercului înscris în triunghiul ABC.

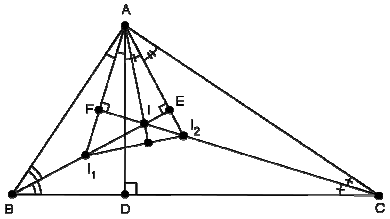
Gheorghe Stoica,Petroşani

Soluţie: Fie $I_1I\cap AI_2=\{E\}$. Să arătăm că $I_1E\perp AI_2$ şi $I_2F\perp AI_1$ şi de aici va rezulta că I este ortocentrul triunghiului AI_1I_2.

Avem: $m(\sphericalangle AI_1I)=m(\sphericalangle BAI_1)+m(\sphericalangle I_1BA)=$

$=\frac{1}{2}\cdot m(\sphericalangle BAD)+\frac{1}{2}\cdot m(\sphericalangle DBA)=\frac{1}{2}\cdot 90^\circ=45^\circ,$

$m(\sphericalangle I_1AI_2)=m(\sphericalangle I_1AD)+m(\sphericalangle I_2AD)=\frac{1}{2}\cdot m(\sphericalangle BAC)=45^\circ.$



În $\Delta AI_1E,\ m(\sphericalangle I_1)=m(\sphericalangle A)=45^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle E)=90^\circ \Rightarrow I_1E\perp AI_2.$

Analog arătăm că $I_2F\perp AI_1$ şi atunci I este ortocentrul triunghiului AI_1I_2.

Avem $IA=\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{r}{\sin 45^\circ}=\frac{2r}{\sqrt{2}}=r\sqrt{2}$ (1) şi $IA=2R_{\Delta AI_1I_2}\cos(\sphericalangle I_1AI_2)=2\cdot R_{\Delta AI_1I_2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}R_{\Delta AI_1I_2}$ (2)

Din relaţiile (1) şi (2) rezultă concluzia.

Barem:

Arată că I este ortocentrul triunghiului AI_1I_2.	4 p
Demonstrează $IA=r\sqrt{2}$	1 p
Demonstrează $IA=\sqrt{2}R_{\Delta AI_1I_2}$	1 p
Finalizare	1 p

Orice altă rezolvare corectă va fi punctată corespunzător.